Chapitre : Exercices sur les familles sommables

1 Familles sommables

Exercice 1 **Un exemple simple de famille sommable** –

Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Indication ▼ Correction ▼ [1955]

Exercice 2 **Exemples de familles non sommables** –

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{n,p}=\frac{1}{n^2-p^2}$ si $n\neq p$ et $a_{n,n}=0$.

Indication ▼ Correction ▼ [1954]

Exercice 3 **Avec un paramètre** –

On pose, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1956]

Exercice 4 **Sommabilité par permutation des sommes –**

Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n,p) \in I$, on pose $u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)} a_p$ si $p \leq n$, $u_{n,p} = 0$ sinon. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Indication ▼ Correction ▼ [1958]

Exercice 5 **Une somme double –**

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1961]

Exercice 6 **Série des restes des factorielles –**

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1960]

Exercice 7 **Calcul de sommes** –

Calculer les sommes suivantes, après en avoir justifié l'existence.

1. $\sum_{p,q\geq 0} \frac{z^p}{q!}$, $|z|<1$ **2.** $\sum_{p,q\geq 0} \frac{a^p b^q}{p!q!}$

3. $\sum_{p,q\geq 0} \frac{q^p z^p}{p!q!}$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 8 ★★ **Série des restes de la série de Riemann** –

1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1962]

Exercice 9 ★★★ **Sommables ou non ? –**

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1. $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geq 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **2.** $\left(\frac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p\geq 1}$

3. $\left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$, $a,b>0$.

Indication ▼ Correction ▼ [3245]

Exercice 10 **Réorganisation des termes –**

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Indication ▼ Correction ▼ [1957]

Exercice 11 ★★★★ **Produit de convolution –**

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. Soit $u,v\in\ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2. Pour $u,v\in\ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u\star v$ par $(u\star v)_n=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k v_{n-k}$ où $n\in\mathbb{Z}$. Démontrer que $u\star v\in\ell^1(\mathbb{Z})$, puis majorer $\|u\star v\|$ à l'aide de $\|u\|$ et de $\|v\|$.

3. Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.

4. On définit $u\in\ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0=1$, $u_1=-1$ et $u_n=0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$.

Indication ▼ Correction ▼ [1959]

2 Produit de Cauchy

Exercice 12 **Somme d'une série et produit de Cauchy –**

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a|<1$ et $|b|<1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 13 ★★★ **Somme d'une série par produit de Cauchy –**

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Indication ▼ Correction ▼

Indication pour l'exercice 1 ▲

Couper $\mathbb{Z}$ en deux.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Il y a beaucoup de termes plus grands que $1/4$...
2.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Appliquer le théorème de sommation par paquets en regroupant les termes en fonction de la valeur de $m+n$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Utiliser le théorème de permutation des sommes, mais dans le bon sens !

Indication pour l'exercice 5 ▲

Faire deux sommations, dans le bon ordre. On pourra utiliser le fait qu'une des deux sommes est télescopique.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Permuter l'ordre des sommations.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour les deux premières sommes, appliquer le théorème de Fubini. Pour la troisième, appliquer le théorème de permutation de l'ordre des termes, en commençant par sommer sur p.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Comparaison à une intégrale !
2.
3. Théorème de permutation des sommes.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Se ramener à $\alpha > 0$ et utiliser le théorème de permutation des sommes.
2. Utiliser le théorème de permutation des sommes. On pourra se ramener à une série télescopique pour la somme sur p.
3. On pourra utiliser que $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ si $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Démontrer que la famille $(|x|^{kl})_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Calculer la somme de la famille sommable de deux façons : l'une par des sommations successives, l'autre en regroupant judicieusement certains termes.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. La famille (v_n) est majorée.
2.
3.
4.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Écrire $\frac{1}{1-a}$ comme somme d'une série, puis faire le produit de Cauchy des deux séries.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Majorer w_n. On pourra reconnaitre dans la somme le début de $\exp(4)$.
2. Écrire le produit de Cauchy de $\left(\sum_{k\geq 0} \frac{b^k}{k!}\right)$ et de $\sum_{k\geq 0} a^k$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Écrivons que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^*_- \cup \mathbb{N}$. Démontrer la sommabilité de la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ revient à démontrer la sommabilité des deux familles $(q^{|n|})_{n\geq 0}$ et $(q^{|n|})_{n<0}$. Puisque $\mathbb{Z}^*_-$ et $\mathbb{N}$ peuvent être facilement mis en bijection avec $\mathbb{N}$, il s'agit de démontrer que les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ et $\sum_{n\geq 1} q^{|-n|}$ convergent absolument. C'est bien le cas puisqu'on a deux séries géométriques de raison dont le module est strictement inférieur à 1. Pour la somme, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{n\geq 0} q^n + \sum_{n\geq 1} q^n \\ &= 2\sum_{n\geq 0} q^n - 1 \\ &= \frac{2}{1-q} - 1 = \frac{1+q}{1-q}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Il y a une infinité de termes dans $\mathbb{Q}\cap[1,2]$. En particulier, il y a une infinité de termes de la famille qui sont supérieurs à $1/4$. Ceci entraîne que la famille n'est pas sommable, ce qu'on peut retrouver en utilisant la définition. Si chaque somme finie de la série était majorée par M, il suffirait de prendre un ensemble fini F de $\mathbb{Q}\cap[1,2]$ contenant strictement plus de $4M$ éléments pour obtenir

$$\sum_{x\in F} \frac{1}{x^2} > M,$$

ce qui est une contradiction.

2. Si la famille était sommable, toute sous-famille serait sommable. Prenons $I = \{(n+1,n);\ n\in\mathbb{N}\}$. La famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in I} = (a_{n+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ serait donc sommable. Ceci serait équivalent à la convergence de la série

$$\sum_n a_{n+1,n} = \sum_n \frac{1}{2n+1}.$$

Cette dernière série n'étant pas convergente, la famille n'est pas sommable.

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons $I = \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et pour $p\geq 2$, $I_p = \{(m,n)\in I; m+n=p\}$. Alors $(I_p)_{p\geq 2}$ est une partition de I. De plus, I_p a pour cardinal $p-1$ et on a donc

$$\sum_{i\in I_p} a_i = \frac{p-1}{p^\alpha}.$$

Par le théorème de sommation par paquets, la convergence de la série $\sum_i a_i$ est équivalent à la convergence de la série $\sum_p \left(\sum_{i\in I_p} a_i\right) = \sum_p \frac{p-1}{p^\alpha}$. Par comparaison à une série de Riemann, cette dernière série converge si et seulement si $\alpha > 2$. La famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Par le théorème de permutation des sommes, il suffit de prouver que, pour tout $p\geq 1$, la série $\sum_n |u_{n,p}|$ est convergente, et que la série $\sum_p \left(\sum_{n\geq 1} |u_{n,p}|\right)$ est convergente. Soit donc $p\geq 1$. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} |u_{n,p}| = \sum_{n\geq p} \frac{p|a_p|}{n(n+1)} = p|a_p| \sum_{n\geq p} \frac{1}{n(n+1)} = |a_p|$$

où la dernière égalité vient de l'écriture $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et du fait qu'on réalise une somme télescopique. La série $\sum_n |u_{n,p}|$ est donc bien convergente de somme $|a_p|$. Puisque la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente, on a bien prouvé que la famille était sommable et sa somme est précisément la somme de la série $\sum_p a_p$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On doit montrer la sommabilité de la famille et calculer sa somme. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge, puis que la série $\sum_q \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. La somme de la famille sera alors égale la somme de cette dernière série. Mais, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{N+q^2+1}.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ et de plus

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2}.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

On va permuter l'ordre des séries. Pour cela, il suffit de prouver que la famille $(\frac{1}{k!})_{(n,k)\in I}$ où $I = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2; k \geq n\}$ est sommable. S'agissant d'une famille dont tous les termes sont positifs, il suffit de vérifier que la série

$$\sum_{k\geq 0} \left(\sum_{n\leq k} \frac{1}{k!} \right)$$

converge (remarquons qu'à l'intérieur, la somme est finie). Mais,

$$\left(\sum_{n\leq k} \frac{1}{k!} \right) = \frac{k+1}{k!}$$

qui est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+1)}{k!} = 2e.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On a $\frac{z^p}{q!} = z^p \times \frac{1}{q!}$ et donc on voit apparaître une famille sommable "produit". Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est sommable et que la famille $(\frac{1}{q!})_{q\in\mathbb{N}}$ est sommable, il en est de même de la famille initiale et

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{z^p}{q!} = \left(\sum_{p\geq 0} z^p \right) \left(\sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!} \right) = \frac{e}{1-z}.$$

2. On raisonne exactement de la même façon et on trouve

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{a^p b^q}{p!q!} = \left(\sum_{p\geq 0} \frac{a^p}{p!} \right) \left(\sum_{q\geq 0} \frac{b^q}{q!} \right) = e^a e^b.$$

3. On commence par montrer la sommabilité de la famille en utilisant le théorème de permutation des sommes. On a, pour $q \geq 0$,

$$\sum_{p\geq 0} \frac{q^p|z|^p}{p!} = \exp(q|z|) = \big(\exp(|z|)\big)^q.$$

Cela entraîne que

$$\sum_{q\geq 0}\sum_{p\geq 0} \frac{q^p|z|^p}{q!p!} = \sum_{q\geq 0} \frac{\big(\exp(|z|)\big)^q}{q!} = \exp(\exp(|z|)).$$

Ceci prouve que la famille est sommable. Reprenant le même calcul mais sans les modules, on trouve

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{q^p z^p}{q!p!} = \exp(\exp(z)).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. C'est très classique, il suffit de comparer à une intégrale. En effet, pour $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En sommant cette inégalité pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, et en calculant les intégrales résultantes, on trouve

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et donc

$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. Pour que la série à l'intérieur converge, il est nécessaire et suffisant que $\alpha > 1$. On a alors trouvé un équivalent de cette somme, et pour que la série à l'extérieur converge, il est alors nécessaire et suffisant que $\alpha > 2$. On peut donc donner un sens à cette expression si et seulement si $\alpha > 2$.

3. Comme les termes de la famille sont positifs, démontrer que cette expression a un sens revient à prouver que la famille est sommable, ou encore que l'on peut donner un sens à la double somme "permutée", c'est-à-dire à

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n<k} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Mais la somme à l'intérieur vaut $\frac{1}{k^{\alpha-1}}$ et on est ramené à l'étude de la série $\sum_k \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha > 2$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n<k} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Remarquons d'abord que si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^{\alpha p}} \geq 1$, ce qui empêche la famille d'être sommable. Supposons donc $\alpha > 0$. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. On commence par remarquer que

$$\sum_{p\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha p}} = \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}}}{1-\frac{1}{n^\alpha}} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$ et donc la famille est sommable si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. Soit $n \geq 1$. Alors on a

$$\frac{1}{p(n+p)} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+n}\right).$$

On a donc une série télescopique et

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p(n+p)}=\frac{1}{n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Il s'agit donc maintenant d'étudier la convergence de

$$\sum\frac{1}{n^2}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

En utilisant l'estimation bien connue

$$1+\cdots+\frac{1}{n}\sim_{n\to+\infty}\ln(n)$$

on obtient

$$\frac{1}{n^2}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)\sim_{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$$

et puisque $\frac{\ln(n)}{n^2}=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, la série est convergente. Donc la famille est sommable.

3. On commence par remarquer que si $a\leq 1$, la famille n'est pas sommable. En effet, la sous-famille $(\frac{1}{a^p+b^q})_{(p,q)\in I}$ où $I=\{(p,1):\ p\in\mathbb{Z}\}$ n'est pas sommable puisque la série

$$\sum\frac{1}{a^p+1}$$

n'est pas convergente. De même, si $b\leq 1$, la famille n'est pas sommable. On peut donc supposer $a>1$ et $b>1$. Dans ce cas, puisque $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ pour tout $x,y\geq 0$ (développer $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$), on sait que

$$\frac{1}{a^p+b^q}\leq\frac{1}{2a^{p/2}b^{q/2}}.$$

Mais

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}}\frac{1}{a^{p/2}b^{q/2}}=\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{a^{p/2}}\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}}\frac{1}{b^{q/2}}\right)<+\infty$$

puisque $\sqrt{a},\sqrt{b}>1$. Finalement, on a prouvé que la famille est sommable.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Il suffit, par le théorème de permutation des sommes, de démontrer que, pour chaque $k\geq 1$, la série $\sum_l |x|^{kl}$ converge, et que la série $\sum_k\sum_{l\geq 1}|x|^{kl}$ est aussi convergente. Mais, puisque $|x|<1$, la première série converge, de somme

$$\sum_{l\geq 1}x^{kl}=\frac{|x|^k}{1-|x|^k}.$$

Maintenant,

$$\frac{|x|^k}{1-|x|^k}\sim_{k\to+\infty}|x|^k$$

et donc la série $\sum_{k\geq 1}\frac{|x|^k}{1-|x|^k}$ est convergente.

2. Calculons de deux façons différentes la somme de la famille sommable. D'une part, en procédant par sommation successive comme dans la question précédente, on a

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}x^{kl}=\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{1-x^k}.$$

D'autre part, posons, pour $n\geq 1$, $I_n=\{(k,l);\ k\cdot l=n\}$. Alors on a aussi

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}x^{kl}=\sum_{n\geq 1}\sum_{(k,l)\in I_n}x^{kl}=\sum_{n\geq 1}\mathrm{card}(I_n)x^n.$$

Mais le cardinal de I_n est justement le nombre de diviseurs de n (on peut choisir pour k n'importe quel diviseur positif de n, et ceci définit aussi uniquement l).

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, la famille $(|v_n|)$ est majorée. Il existe donc une constante $M>0$ telle que, pour tous les entiers k et n, $|u_k v_{n-k}| \leq M|u_k|$. Puisque $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable, il en est de même de $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$.

2. Pour chaque $k\in\mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_k|\cdot|v_{n-k}| = |u_k|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|$. La famille $(|u_k|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|)_{k\in\mathbb{Z}}$ est elle-même sommable, de somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|$. Ainsi, la famille $(u_k v_{n-k})_{(k,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable, de somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_n$. On en déduit que la famille $(\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k v_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de même somme. Finalement, en prenant partout des modules, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k v_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|.$$

On en déduit que

$$\|u\star v\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k v_{n-k}\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k v_{n-k}| = \|u\|\times\|v\|.$$

3. On peut remarquer que $(u\star v)_n = \sum_{k+l=n}u_k v_l$. On en déduit immédiatement la commutativité. Pour l'associativité, il suffit d'écrire

$$((u\star v)\star w)_n = \sum_{k+l+m=n}u_k v_l w_m = (u\star(v\star w))_n.$$

L'élément neutre est donné par la suite δ vérifiant $\delta_0=1$ et $\delta_n=0$ sinon.

4. Imaginons que u soit inversible et notons v son inverse. Alors $(u\star v)_n = v_n - v_{n-1}$. Pour $n\geq 1$, on obtient $v_n = v_{n-1}$ et finalement $v_n = v_0$. Mais puisque (v_n) est sommable, ceci entraîne que $v_0=0$. Pour $n=0$, on a $v_0 - v_{-1} = 1$, et donc $v_{-1}=-1$. Enfin, pour $n\leq -1$, on a à nouveau $v_{n-1}=v_n$, ce qui entraîne que $v_n = v_-1 = -1$ pour tout $n<0$. Ce n'est pas possible, car ceci contredit que $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Correction de l'exercice 12 ▲

D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n\geq 0}a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0}b^n.$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a|<1$ et $|b|<1$. On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que

$$\frac{1}{1-a}\times\frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0}w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}.$$

Si $a=b$, on trouve directement que $w_n = \sum_{k=0}^{n}a^n = (n+1)a^n$. Si $a\neq b$, alors il faut utiliser la factorisation

$$a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\times\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}$$

qui donne le résultat. Dans le cas où $a\neq b$, on peut très facilement conclure sans utiliser le produit de Cauchy, en calculant séparément la somme de chaque série géométrie $\sum_{n\geq 0}a^{n+1}$ et $\sum_{n\geq 0}b^{n+1}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

L'exercice repose sur la définition de l'exponentielle par une série : pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour chaque $n\geq 0$, w_n est positif et satisfait

$$w_n \leq 2^{-n}\exp(4).$$

Puisque la série de terme général $2^{-n}\exp(4)$ est convergente, il en est de même de la série de terme général w_n.

2. Écrivons le produit de Cauchy de $\sum_{k\geq 0}\frac{b^k}{k!}$ par $\sum_{k\geq 0}a^k$, où a et b sont des réels avec $|a|<1$. Ces deux séries sont absolument convergentes, et on a :

$$\exp(b)\times\frac{1}{1-a}=\left(\sum_{k\geq 0}\frac{b^k}{k!}\right)\times\left(\sum_{k\geq 0}a^k\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$$

où u_n est défini par

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{b^k}{k!}a^{n-k}=a^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(b/a)^k}{k!}.$$

Pour $a=1/2$ et $b=2$, on trouve $w_n=u_n$. Ainsi, on a

$$\sum_{n\geq 0}w_n=\exp(2)\times\frac{1}{1-1/2}=2\exp(2).$$